Aufgaben des MSG-Zirkels 8b
Schuljahr 2005/2006

Alexander Bobenko und Ivan Izmestiev

Technische Universität Berlin

Geometrie

Aufgabe G.1

Berechne die Innenwinkelsumme eines n-Ecks.

Aufgabe G.2

Zeige, dass die Summe der gegenüberliegenden Winkel eines in einem Kreis einbeschriebenen Vierecks immer 180 Grad beträgt.

Aufgabe G.3

Die Seite AB des Quadrates $\square ABCD$ sei die Hypotenuse eines außerhalb des Quadrates liegenden, rechtwinkligen Dreiecks $\triangle ABE$. Zeige, dass die Gerade, die den Punkt E mit dem Zentrum des Quadrates verbindet, die Winkelhalbierende des rechten Winkels des Dreiecks ist.

Aufgabe G.4

Zeige, dass die folgenden Aussagen über ein Viereck äquivalent sind:

a) Gegenüberliegende Seiten sind parallel.

b) Gegenüberliegende Seiten haben die gleiche Länge.

c) Die Diagonalen schneiden sich in ihrem gemeinsamen Mittelpunkt.

Wie heißt ein solches Viereck?

Aufgabe G.5

In der Ebene sind zwei Punkte A und B und eine Gerade l gegeben. Finde auf l den Punkt M mit der maximalen Differenz der Abstände $|AM|$ und $|BM|$.

Aufgabe G.6

Seien E, F, G, H die Mittelpunkte der Seiten eines Vierecks $\square ABCD$.

a) Zeige, dass $\square EFGH$ ein Parallelogramm ist.

b) Welchen Anteil des Flächeninhaltes von $\square ABCD$ hat $\square EFGH$?

c) Wann ist $\square EFGH$ ein Quadrat?

d) Beschreibe alle Vierecke $\square ABCD$, für die $\square EFGH$ stets dasselbe Parallelogramm ist.

Aufgabe G.7

Welche Parallelogramme besitzen Inkreise (mit Beweis)?

Aufgabe G.8

Ein rechteckiges Brett steht angelehnt an der Wand. Plötzlich beginnt es wegzurutschen und fällt auf den Boden. Welche Bahn beschreibt dabei der Mittelpunkt des Brettes?

Aufgabe G.9

Berechne die Winkelsumme eines 5-zackigen Sterns. (Der Stern ist nicht unbedingt regulär.)

Aufgabe G.10

Beweise die folgende Formel für den Flächeninhalt F eines Trapezes:

$$F = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Hierbei bezeichnet h die Länge der Höhe und a und b sind die Längen der zueinander parallelen Seiten des Trapezes.

Aufgabe G.11

Ein intelligenter Käfer kriecht vom Punkt A zum Punkt B. Er wählt seinen Weg so, dass die Summe $|KA|^2 + |KB|^2$ von den Quadraten seiner Entfernungen zu A und zu B immer konstant bleibt. Wie sieht sein Weg aus?

Aufgabe G.12

Im Dreieck $\triangle ABC$ gilt $|AB| = 15$ cm, $|BC| = 13$ cm, $|AC| = 8$ cm. Sei CH die Höhe zur Seite AB. Finde $|CH|$.

Aufgabe G.13

In der Ebene liegen 7 Geraden, von denen keine zwei parallel sind und keine drei durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Wie viele Dreiecke bilden sie? (Es zählen auch die Dreiecke, die von anderen Geraden gekreuzt werden.)

Aufgabe G.14

Seien AB und CD die parallelen Seiten eines Trapezes $\square ABCD$, und sei E der Schnittpunkt der Diagonalen. Zeige, dass die Flächeninhälte der Dreiecke $\triangle AED$ und $\triangle BEC$ gleich sind.

Aufgabe G.15

Zeige, dass die Winkelhalbierende eines Dreiecks die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der Seitenlängen der anliegenden Seiten schneidet.

Aufgabe G.16

Sei E der Schnittpunkt der Diagonalen eines Vierecks $\square ABCD$. Die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle AED$ und $\triangle BEC$ sind gleich. Zeige, dass $\square ABCD$ ein Trapez ist.

Aufgabe G.17

Berechne den Schnittwinkel der Winkelhalbierenden durch die Punkte B und C eines Dreiecks $\triangle ABC$, wenn der Winkel $\angle BAC = \alpha$ bekannt ist.

Aufgabe G.18

Zwei Sekanten eines Kreises schneiden sich außerhalb des Kreises. Sie begrenzen zwei Kreisbögen, die zwischen ihnen liegen. Zeige: Der Schnittwinkel der Sekanten ist die Hälfte der Differenz der Winkel der Kreisbögen. (Der Winkel eines Kreisbogens AB auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt O ist der Winkel $\angle AOB$.)

Aufgabe G.19

Auf jeder Seite AB, BC und CA eines Dreiecks $\triangle ABC$ sind jeweils ein Punkt E, F und G gewählt. Die Dreiecke $\triangle AEG$, $\triangle EBF$ und $\triangle FCG$ besitzen jeweils einen Umkreis. Der Satz von Miquel besagt, dass diese drei Kreise sich in einem Punkt treffen. Beweise diesen Satz.

Aufgabe G.20

Zwei Tangenten berühren einen Kreis in den Punkten A und B und schneiden sich im Punkt C. Zeige $|AC| = |BC|$.

Aufgabe G.21

AC und AD sind Durchmesser von zwei Kreisen, die sich in den Punkten A und B schneiden. Zeige, dass die Punkte B, C, D auf einer Gerade liegen.

Aufgabe G.22

Zeige, dass ein Trapez genau dann gleichschenklig ist, wenn es einem Kreis einbeschrieben ist.

Aufgabe G.23

Ein reguläres Achteck ist einem Kreis vom Radius 1 einbeschrieben. Finde die Seitenlänge des Achtecks. Vergleiche seinen Umfang mit dem Umfang des Kreises.

Aufgabe G.24

Ein Polytop hat 22 Seitenflächen, die allesamt Dreiecke sind. Kann man genau sagen, wie viele Ecken dieses Polytop besitzt?

Aufgabe G.25

Die Diagonalen des Vierecks $\square ABCD$ teilen es in vier Dreiecke $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$ und $\triangle DOA$ (O ist der Diagonalenschnittpunkt). Zeige:

$$S(\triangle AOB) \cdot S(\triangle COD) = S(\triangle BOC) \cdot S(\triangle DOA),$$

wobei S den Flächeninhalt bezeichnet.

Aufgabe G.26

Ein Polyeder hat nur fünfeckige und sechseckige Seitenflächen. Wie viele der Seitenflächen sind Fünfecke?