Aufgaben des MSG-Zirkels 9b
Schuljahr 2006/2007

Alexander Bobenko und Ivan Izmestiev

Technische Universität Berlin

Folgen

Aufgabe F.1

Sei a_n die vorletzte Ziffer in der Dezimaldarstellung von 2^n. Zeige, dass die Folge (a_n) periodisch ist.

Aufgabe F.2

Die Folge (a_n) ist definiert durch

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ a_2 &= 1, \\ a_{n+1} &= \frac{a_n + a_{n+1}}{2} \ . \end{aligned}$$

Ist die Folge (a_n) periodisch? Wenn nicht, so beschreibe ihr Verhalten.

Aufgabe F.3

In der Folge (a_n) ist a_{n+1} die letzte Ziffer des Produktes $a_{n-1} \cdot a_n$. Zeige, dass (a_n) periodisch ist (ab einem gewissen Glied) mit einer Periodenlänge nicht größer als 25.

Aufgabe F.4

Definiere die Folge (a_n) wie folgt: a_1 ist die genaue Masse der Erde in Gramm, nach oben abgerundet, und a_{n+1} ist die Summe der Quadrate der Ziffern in der Dezimaldarstellung von a_n.
Zeige, dass (a_n) periodisch ist (ab einem gewissen Glied) und schätze die Länge der Periode ab.

Aufgabe F.5

Sei $(F_1, F_2, \ldots)$ die Fibonacci-Folge:

$$\begin{aligned} &F_1 = 1, \\ &F_2 = 1, \\ &F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \qquad \text{für} \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Zeige, dass es eine durch 2006 teilbare Fibonacci-Zahl gibt.
Hinweis: Kann man das als ein reversibles dynamisches System betrachten? Kann man auch eine "Fibonacci-Zahl" F_0 definieren?