Aufgaben des MSG-Zirkels 9b
Schuljahr 2006/2007

Alexander Bobenko und Ivan Izmestiev

Technische Universität Berlin

Geometrie

Aufgabe G.1

Sei $ABCDEF$ ein reguläres Sechseck und O sein Zentrum. In einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Ursprung O hat der Punkt A die Koordinaten $(1,0)$. Finde die Koordinaten aller anderen Ecken des Sechsecks.

Aufgabe G.2

Sind die Punkte $O(0,0)$, $A(5,3)$ und $B(-8,13)$ die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks?

Aufgabe G.3

Sei $\square ABCD$ ein Rechteck. Zeige für jeden Punkt M der Ebene:

$$|MA|^2 + |MC|^2 = |MB|^2 + |MD|^2 \ .$$

Aufgabe G.4

Gehen die drei Geraden, die durch die Gleichungen $x - y - 3 = 0$, $3x + 5y - 1 = 0$ beziehungsweise $x + 3y + 1 = 0$ beschrieben werden, durch einen gemeinsamen Punkt?

Aufgabe G.5

Bestimme die Gleichung der Geraden, die durch den Punkt $(2,1)$ geht und zu der Geraden mit der Gleichung $x + 3y = 0$ parallel ist.

Aufgabe G.6

Eine Gerade schneidet die x-Achse im Punkt mit der Abszisse $a \neq 0$ und die y-Achse im Punkt mit der Ordinate $b \neq 0$. Zeige, dass diese Gerade durch die Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

definiert wird.

Aufgabe G.7

Sei $\square ABCD$ ein beli
Mittelpunkte der Seit
Mittelpunkte der Dia
Zeige, dass die Gerad
Wie drücken sich die
Punkte A, B, C, D a

Aufgabe G.8

Ein Kreis geht durch den Punkt $(1, 1)$ und berührt die x-Achse im Punkt $(3, 0)$. Finde die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises und seinen Radius.

Aufgabe G.9

Seien A und B zwei Punkte in der Ebene. Was ist der geometrische Ort aller Punkte, für die der Abstand zu A doppelt so groß ist wie der Abstand zu B?

Aufgabe G.10

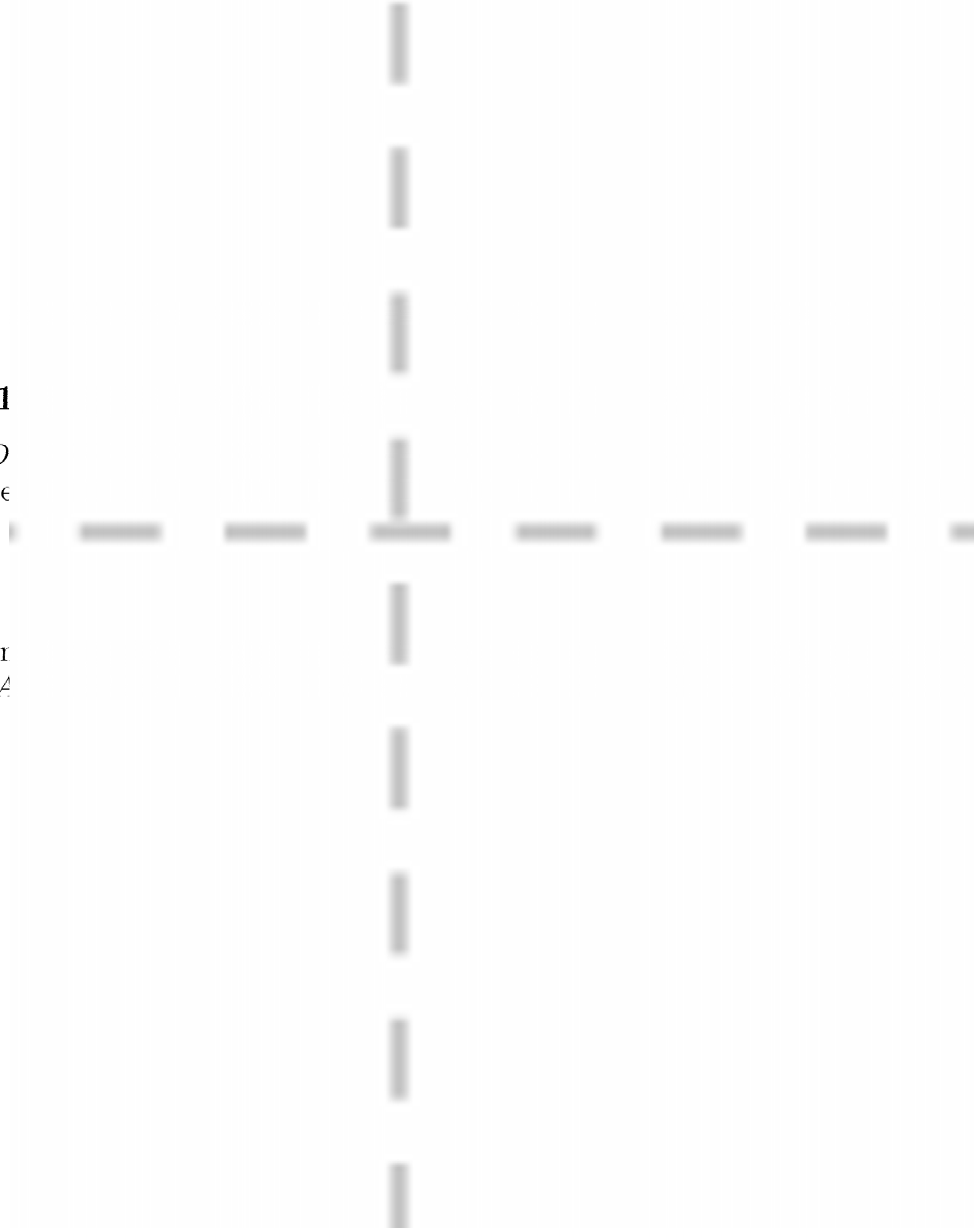
Wie heißt die durch die Gleichung

$$x^2 + 2y^2 + 3x + 2y + 1 = 0$$

definierte Kurve?

Aufgabe G.11

Seien AB und CD
Kreises. Wir wähle



gilt. Bezeichne E r
dem Kreis durch A

Aufgabe G.12

Sei P die Parabel $y = x^2$ und sei G die Gerade $y = 2x - 1$. Wie liegen G und P zueinander? (Schneiden oder berühren sie sich oder haben sie sogar keine gemeinsamen Punkte?)

Aufgabe G.13

Seien A und B zwei Punkte mit Koordinaten $(1, 0)$ beziehungsweise $(-1, 0)$. Finde den geometrischen Ort aller Punkte X, für die Folgendes gilt:

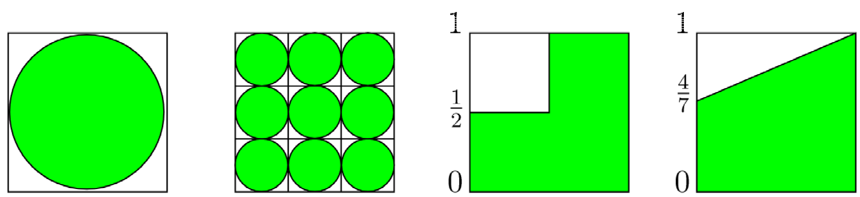
$$|AX|^2 + |BX|^2 = 6 \ .$$

Aufgabe G.14

In der Koordinatenebene sind die Punkte $O(0, 0)$, $A(a, b)$ und $B(-b, a)$ gegeben. Zeige, dass OAB ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck ist.

Aufgabe G.15

Welche von den vier schraffierten Flächen ist am kleinsten beziehungsweise am größten?



Aufgabe G.16

Seien a, b und c die Seitenlängen eines Dreiecks. Zeige:

$$a^2 + b^2 > \frac{c^2}{2}.$$

Aufgabe G.17

Du hast einen ein Meter langen Stock. Wie kannst du die Höhe

a) des Brandenburger Tores

b) der Quadriga auf dem Brandenburger Tor

messen?

Aufgabe G.18

Die Diagonalen eines Trapezes $\square ABCD$ mit den Seiten BC und AD schneiden sich im Punkt O. Zeige, dass

a) die Dreiecke $\triangle AOD$ und $\triangle BOC$ den gleichen Flächeninhalt haben.

b) $|AO| : |BO| = |CO| : |DO|$ gilt.

Aufgabe G.19

Die Winkelhalbierende AD schneidet die Seite des Dreieckes $\triangle ABC$ im Punkt D. Zeige, dass

$$|AB| : |AC| = |DB| : |DC|$$

gilt.

Aufgabe G.20

Die Seitenlängen $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ eines Dreieckes $\triangle ABC$ sind bekannt. Die Winkelhalbierenden BE und CF schneiden die Seiten AB und AC in den Punkten F und E. Berechne das Verhältnis $|AF| : |AE|$.

Aufgabe G.21

Wie groß kann das Verhältnis der Radien von In- und Umkreis eines Dreiecks höchstens sein?

Aufgabe G.22

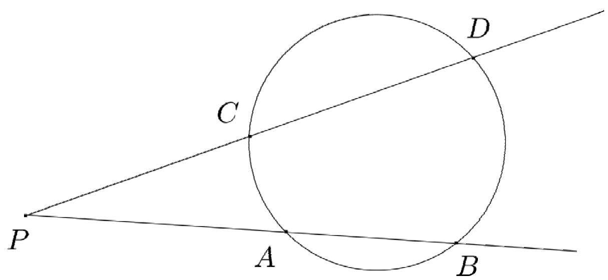
Von einem Punkt auf der Erde geht man einen Kilometer nach Süden, dann einen Kilometer nach Westen und schließlich einen Kilometer nach Norden, und kommt dann wieder im ursprünglichen Punkt an. Beschreibe alle solche Punkte auf der Erde, für die das möglich ist.

Aufgabe G.23

Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und E ein Punkt auf der Seite AC, sodass die Dreiecke $\triangle ABE$ und $\triangle BCE$ ähnlich sind. Das Längenverhältnis entsprechender Seiten dieser Dreiecke sei $\sqrt{3}$. Bestimme die Winkel des Dreiecks $\triangle ABC$.

Aufgabe G.24

Seien ein Kreis und ein Punkt P außerhalb des Kreises gegeben. Zwei Strahlen durch P schneiden den Kreis in den Punkten A, B, C, D wie in der Abbildung.



Zeige:

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|.$$

Aufgabe G.25

BE und CF seien die Höhen in einem spitzwinkligen Dreieck $\triangle ABC$. Zeige, dass die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle AFE$ ähnlich zueinander sind.

Aufgabe G.26

CE sei die Höhe in einem spitzwinkligen Dreieck $\triangle ABC$. Von E aus konstruiert man die Höhen EF und EG in den Dreiecken $\triangle AEC$ und $\triangle CEB$. Zeige, dass die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle GFC$ ähnlich zueinander sind.

Aufgabe G.27

Die Seitenlängen des Dreiecks $\triangle ABC$ sind $|AB| = 1$, $|BC| = 1$, $|AC| = \sqrt{2}$. Berechne die Länge der Winkelhalbierenden AD.

Aufgabe G.28

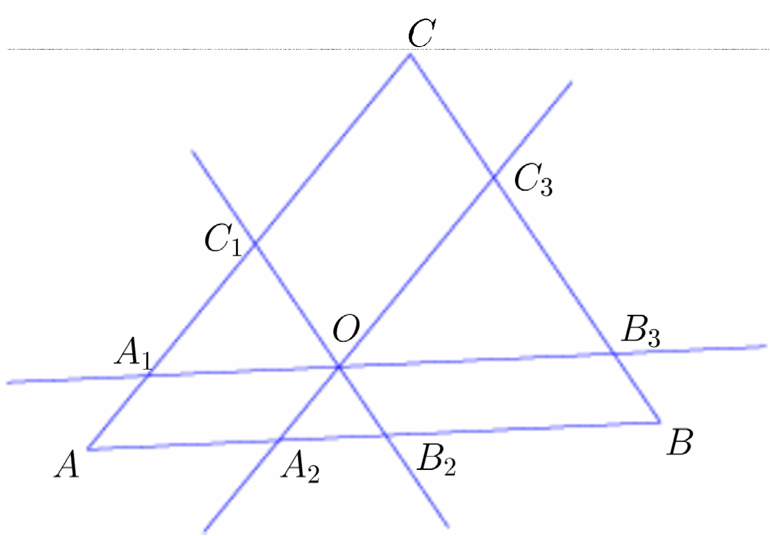
In einem inneren Punkt O eines Dreiecks $\triangle ABC$ schneiden sich drei Geraden, die parallel zu den Kanten des Dreiecks sind. Seien p, r beziehungsweise R der Umfang, der Radius des Inkreises beziehungsweise der Radius des Umkreises des Dreiecks $\triangle ABC$.

Des Weiteren bezeichnen p_1, r_1, R_1; p_2, r_2, R_2 beziehungsweise p_3, r_3, R_3 die entsprechende Größen für die Dreiecke $\triangle A_1OC_1$, $\triangle A_2B_2O$ beziehungsweise $\triangle OB_3C_3$ (siehe Bild). Zeige:

a) $p = p_1 + p_2 + p_3$.

b) $r = r_1 + r_2 + r_3$.

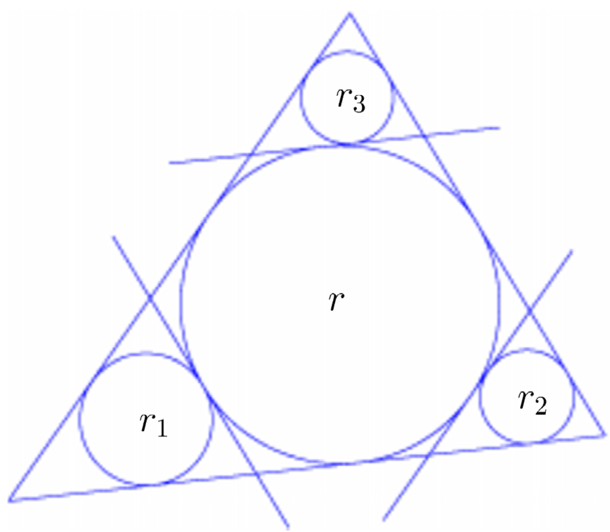
c) $R = R_1 + R_2 + R_3$.



Aufgabe G.29

In einem Dreieck konstruiert man drei Tangenten an den Inkreis, die parallel zu den Kanten des Dreiecks sind. Seien r und r_1, r_2, r_3 die Radien der Inkreise des Dreiecks $\triangle ABC$ beziehungsweise der “abgeschnittenen” Dreiecke (siehe Abbildung). Zeige

$$r = r_1 + r_2 + r_3 \ .$$



Aufgabe G.30

Im Dreieck $\triangle ABC$ schneiden sich die Winkelhalbierende BL, die Seitenhalbierende CM und die Höhe AH in einem Punkt O. Dabei gilt $|AO| = |OB|$. Zeige, dass das Dreieck $\triangle ABC$ gleichseitig ist.

Aufgabe G.31

Seien A und B Punkte auf einer Geraden. Kann man 45 Punkte auf der Geraden außerhalb der Strecke AB so markieren, dass die Summe ihrer Abstände zu A gleich der Summe ihrer Abstände zu B ist?

Aufgabe G.32

Konstruiere mit Zirkel und Lineal:

a) die Mitte einer gegebenen Strecke AB;

b) die Senkrechte zu einer Geraden l durch einen Punkt A auf l;

c) die Senkrechte zu einer Geraden l durch einen Punkt A nicht auf l.

Aufgabe G.33

Sei A ein Punkt außerhalb der Geraden l. Konstruiere mit Zirkel und Lineal die zu l parallele Gerade durch A.

Aufgabe G.34

Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Tangente an einen gegebenen Kreis durch einen gegebenen Punkt.

Aufgabe G.35

Konstruiere die Kreise, die drei gegebene Geraden berühren. Wann existieren diese Kreise nicht?

Aufgabe G.36

Gegeben sind zwei Strecken der Längen a und b. Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Strecke der Länge

$$\frac{1}{3}(a + b + \sqrt{ab} + \sqrt{a^2 + b^2}) \ .$$

Aufgabe G.37

Betrachte ein vollständiges, regelmäßiges Fünfeck mit der Kantenlänge 1 (vollständig heißt hierbei inklusive aller Diagonalen). Finde die Längen aller Strecken.

Aufgabe G.38

Kann man mit Zirkel und Lineal ein reguläres

a) 10-Eck,

b) 15-Eck,

c) 9-Eck

konstruieren?

Aufgabe G.39

Mit zwei Geraden schneidet man ein Viereck so in drei Teile, dass zwei gegenüberliegende Seiten des Vierecks jeweils gedrittelt werden. Zeige, dass der Flächeninhalt des mittleren Teils gleich einem Drittel des Flächeninhalts des Vierecks ist.

Aufgabe G.40

Berechne die Länge der Meridianminute. Hiermit ist die Länge eines sechszigstel Längengrades gemeint. (Analog zur Bogenminute, die der sechzigste Teil eines Winkelgrades ist.) Dabei sei der Erdradius gleich 6370 Kilometer. Wie heißt dieses Längenmaß?

Aufgabe G.41

Sei $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei B.

a) Sei D ein Punkt auf der Seite BC, sodass $|\angle BAD| = |\angle DAC|$ gilt.
Zeige: $|BD| < |DC|$.

b) Seien $D_1, \ldots, D_n$ Punkte auf der Seite BC, sodass alle Winkel $\angle BAD_1$, $\angle D_1AD_2, \ldots, \angle D_nAC$ gleich sind.
Zeige: $|BD_1| < |D_1D_2| < \ldots < |D_nC|$.

Aufgabe G.42

Gegeben ist eine Strecke der Länge 1. Zeige, dass man mit Zirkel und Lineal jede Strecke rationaler Länge konstruieren kann.

Aufgabe G.43

Berechne den Wert von $n \sin \frac{180^\circ}{n}$ für mehrere Werte von n. Stelle eine Vermutung auf, wie sich diese Zahl für große n verhält.

Aufgabe G.44

Zeige, dass für $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ gilt:

$$\sin\alpha + \cos\alpha > 1 \ .$$

Aufgabe G.45

Beweise die folgende Formel für die Fläche eines Dreiecks:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma \ .$$

Hier bezeichnen a und b, wie üblich, Seitenlängen, und γ ist der Winkel zwischen den Seiten a und b. (*Hinweis*: Benutze die Formel $S = \frac{1}{2} a h_a$.)

Aufgabe G.46

Sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $|AB| = |AC|$. Sei D ein Punkt auf der Seite BC. Zeige, dass die Umkreisradien der Dreiecke $\triangle ABD$ und $\triangle ACD$ gleich sind.

Aufgabe G.47

Zeige, dass für ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c gilt:

$$S = \frac{abc}{4R} \ .$$

Hierbei bezeichnet S die Fläche und R den Umkreisradius des Dreiecks.

Aufgabe G.48

Wir messen jetzt Winkel im Bogenmaß. Zeige, dass für $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ gilt:

$$\sin\alpha < \alpha.$$

Aufgabe G.49

Sei K eine ebene Figur mit der folgenden Eigenschaft: Wenn a und b zwei parallele Tangenten zu K sind (K ist dann zwischen a und b eingeschlossen), dann ist der Abstand zwischen a und b gleich 1. Folgt daraus, dass K ein Kreis ist?

Aufgabe G.50

Man nimmt ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 1, teilt jede Seite in 3 gleiche Teile und konstruiert über dem mittleren Drittel jeder Seite wieder ein gleichseitiges Dreieck, das außen anliegt. In der entstandenen Figur teilt man jede Strecke des Randes in drei gleiche und konstruiert gleichseitige Dreiecke über jedem mittleren Drittel. Nach „unendlich vielen" Schritten erhält man eine Figur mit stark gezacktem Rand, die die Koch'sche Schneeflocke heißt (nach Niels Fabian Helge von Koch (1870 - 1924), einem schwedischen Mathematiker).

Berechne die Fläche und den Umfang der Koch'schen Schneeflocke.

Aufgabe G.51

Auf der Seite AB eines rechtwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ mit dem rechten Winkel $\angle CBA$ ist ein Punkt D so gewählt, dass die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle CBD$ ähnlich sind und das Dreieck $\triangle ADC$ gleichschenklig ist. Bestimme alle Winkel.

Aufgabe G.52

In einem gleichschenkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit $|AB| = |AC|$ wird ein Punkt D auf der Seite AC so gewäht, dass die Dreiecke $\triangle ADB$ und $\triangle CBD$ auch gleichschenklig sind. Bestimme alle Winkel.

Aufgabe G.53

Wie heißt die durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + 4y + 2x + 1 = 0$$

definierte Kurve? Begründe.

Aufgabe G.54

Schneiden sich die Geraden $x - y - 3 = 0$ und $3x + 5y - 1 = 0$? Wenn ja, in welchem Punkt? Wenn nein, warum nicht?

Aufgabe G.55

Seien A und B zwei Punkte in der Ebene. Was ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Abstände nach A und B gleich sind?