Aufgaben des MSG-Zirkels 10b
Schuljahr 2007/2008

Alexander Bobenko und Ivan Izmestiev

Technische Universität Berlin

Graphentheorie

Aufgabe GT.1

Kläre, ob die folgenden Graphen eben sind:

a) Der Graph der Kanten eines Tetraeders.

b) Der Graph der Kanten eines Würfels.

c) Der vollständige Graph K_5, aus dem eine Kante enfernt wurde.

d) Der vollständig bipartite Graph $K_{3,3}$, aus dem eine Kante entfernt wurde.

Aufgabe GT.2

Alle Städte eines Landes sind miteinander mit Einbahnstraßen verbunden. Zeige, dass es eine Stadt gibt, von der aus man alle anderen erreichen kann.

Aufgabe GT.3

Gibt es einen Graph mit Knoten der folgenden Grade:

a) $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots, n, n$?

b) $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots, n, \ldots, n$ (jede Zahl k kommt k Mal vor)?

c) $3, 3, 3, 3, \ldots, 3$ (3 kommt n Mal vor)?

Aufgabe GT.4

Zeige, dass man in jedem zusammenhängenden Graphen einen Knoten und die zugehörige Kanten entfernen kann, sodass der Graph weiterhin zusamenhängend bleibt.

Aufgabe GT.5

Ein Volleyballnetz hat 50×600 Zellen. Wie viele Kanten kann man zerschneiden, ohne dass das Netz in mehrere Teile zerfällt?

Aufgabe GT.6

Alle Knoten eines Graphen haben Grad 3. Zeige, dass der Graph einen Zyklus besitzt.

Aufgabe GT.7

Jedes Paar von 101 Städten eines Landes sei direkt durch eine Straße verbunden. Wie viele Straßen kann man höchstens gleichzeitig für Reparaturarbeiten sperren, sodass alle Städte untereinander erreichbar bleiben?

Aufgabe GT.8

Zwischen je zwei Städten eines Landes gibt es eine direkte Einbahnstraße, die sie verbindet. Zeige, dass man die Fahrtrichtung auf den Straßen so ändern kann, dass alle Städte aus jeder Stadt erreichbar sind.

Aufgabe GT.9

In einem zusammenhängenden Graphen ist die Anzahl der Knoten um eins größer als die Anzahl der Kanten. Zeige, dass der Graph ein Baum ist.

Aufgabe GT.10

Zeige, dass man jeden zusammenhängenden Graphen so orientieren kann, dass man von einem Knoten aus alle andere erreichen kann. Beschreibe die Menge der Knoten, für die eine solche Umorientierung existiert.

Aufgabe GT.11

Alle Kanten des vollständigen Graphens mit 11 Punkten seien weiß oder schwarz gefärbt. Zeige, dass der Teilgraph, der aus den weißen Kanten besteht, oder der Teilgraph, der aus den schwarzen Kanten besteht, nicht eben ist.

Aufgabe GT.12

Sei G ein ebener Graph. Zeige, dass es in G einen Knoten gibt, dessen Grad nicht größer als 5 ist.

Aufgabe GT.13

Von einem Polytop P hat man alle Ecken abgeschnitten, sodass die ursprünglichen Seitenflächen einander nicht mehr berühren. Wie haben sich die Anzahlen V, E und F von Ecken, Kanten und Seitenflächen des Polytops geändert?

Aufgabe GT.14

Finde die Anzahl der unterschiedlichen (das heißt zueinander nicht isomorphen) Bäume

a) mit 5 Ecken.

b) mit 6 Ecken.